LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

Ist $\underline{b}$ eine der Spalten von A, so ist

(a) $\text{Lös}(A, \underline{b}) \neq \emptyset$ ✓

(b) $\text{Lös}(A, \underline{b}) = \emptyset$ ✗

(c) hängt ab von A & $\underline{b}$ ✗

Ist A quadratisch, so ist

(a) $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$ ✗

(b) $\text{Lös}(A, \underline{b})$ ein-eindeutig ✗

(c) hängt ab von A & $\underline{b}$ ✓

Ist A invertierbar, so ist

(a) $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$ ✗

(b) $\text{Lös}(A, \underline{b})$ ein-eindeutig ✓

(c) hängt ab von A & $\underline{b}$ ✗

$A \in M(m \times n; K)$

Lös(A) ist genau dann einelementig, wenn gilt:

(a) $\mathrm{Rang}(A) = n$ ✓

(A hat vollen Spaltenrang)

(b) $\mathrm{Rang}(A) = 0$ ✗

(c) $\dim \text{Lös}(A) = 0$ ✓

(d) $\exists B: B \cdot A = E_n$ ✓

$A \in M(m \times n; K)$

Lös(A, b) ist genau dann einelementig, wenn gilt:

(a) $\mathrm{Rang}(A) = n$ ✗

(A hat vollen Spaltenran)

(b) $\mathrm{Rang}(A) = 0$ ✗

(c) $\dim \text{Lös}(A) = 0$ ✗

(d) $\exists B: B \cdot A = E_n$ ✗

$A \in M(m \times n; K)$

Angenommen, in $Lös(A, y)$ gibt es ≥ 2 linear unabhängige Lösungen.

Dann folgt:

(a) $\operatorname{Rang}(A) \leq n$, und der Fall $\operatorname{Rang}(A) = n$ kommt vor

(b) $\operatorname{Rang}(A) \leq n-1$ und der Fall $\operatorname{Rang}(A) = n-1$ kommt vor

(c) $\operatorname{Rang}(A) \leq n-2$

Rezept: Basiswechsel für lineare Abbildungen (3.6.5)

$V \subset K^N$ UVR der Dimension n $(\leq N)$
$W \subset K^M$ UVR der Dimension m $(\leq M)$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V
$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W

$\}$ Basisvektoren jeweils gegeben als Vektoren in K^N bzw. K^M

$F: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$ darstellende Matrix

<u>Ziel:</u> Berechnung von $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F)$

SCHRITT 1:

Fasse $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ auf als $n \times n$ Matrizen B, B'
$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ auf als $m \times m$ Matrizen C, C'

$$F_B = \Phi_{\mathcal{B}} \qquad F_C = \Phi_{\mathcal{C}}$$
$$F_{B'} = \Phi_{\mathcal{B}'} \qquad F_{C'} = \Phi_{\mathcal{C}'}$$

SCHRITT 2: Finde (Links)Inverse

L_B zu B (also $L_B \cdot B = E_n$)

$L_{C'}$ zu C' (also $L_{C'} \cdot C' = E_m$),

z.B. mit Rezept aus Vorlesu 19.

SCHRITT 3:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F) = L_{C'} \cdot C \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) \cdot L_B \cdot B'$$

$M, M' \in M(m \times n; K)$

M' äquivalent zu M

$:\Longleftrightarrow \exists\, T, S$ invertierbar mit

$$M' = \underbrace{S^{-1}}_{m \times m} \cdot M \cdot \underbrace{T}_{n \times n}$$

Äquivalenz ist

(a) reflexive ✓

(b) symmetrische ✓

(c) transitive ✓

Relation auf $M(m \times n; K)$.

$\longrightarrow$ Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

Wie viele Elemente hat die Quotienmenge

$$M(m+n;K)\,/\,\text{Äquivalenz}?$$

(a) ∞ viele

(b) $m \cdot n$

(c) $\min(m,n)$

(d) $\min(m,n)+1$

(e) $\max(m,n)$

(f) $\max(m,n)+1$